

Exercice 2

Cet exercice porte sur la programmation en général et la récursivité en particulier.

On considère un tableau de nombres de n lignes et p colonnes.

Les lignes sont numérotées de 0 à $n - 1$ et les colonnes sont numérotées de 0 à $p - 1$. La case en haut à gauche est repérée par $(0, 0)$ et la case en bas à droite par $(n - 1, p - 1)$.

On appelle *chemin* une succession de cases allant de la case $(0, 0)$ à la case $(n - 1, p - 1)$, en n'autorisant que des déplacements case par case : soit vers la droite, soit vers le bas.

On appelle *somme* d'un chemin la somme des entiers situés sur ce chemin.

Par exemple, pour le tableau T suivant :

4	1	1	3
2	0	2	1
3	1	5	1

- Un chemin est $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$ (en gras sur le tableau) ;
- La somme du chemin précédent est 14.
- $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$ n'est pas un chemin.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la somme maximale pour tous les chemins possibles allant de la case $(0, 0)$ à la case $(n - 1, p - 1)$.

Question 1 On considère tous les chemins allant de la case $(0, 0)$ à la case $(2, 3)$ du tableau T donné en exemple.

1. Un tel chemin comprend nécessairement 3 déplacements vers la droite. Combien de déplacements vers le bas comprend-il ?
2. La longueur d'un chemin est égal au nombre de cases de ce chemin. Justifier que tous les chemins allant de $(0, 0)$ à $(2, 3)$ ont une longueur égale à 6.

Question 2 En listant tous les chemins possibles allant de $(0, 0)$ à $(2, 3)$ du tableau T, déterminer un chemin qui permet d'obtenir la somme maximale et la valeur de cette somme.

Question 3 On veut créer le tableau T' où chaque élément $T'[i][j]$ est la somme maximale pour tous les chemins possibles allant de $(0, 0)$ à (i, j) .

1. Compléter et recopier sur votre copie le tableau T' donné ci-dessous associé au tableau

T =

4	1	1	3
2	0	2	1
3	1	5	1

T' =

4	5	6	?
6	?	8	10
9	10	?	16

2. Justifier que si j est différent de 0, alors : $T'[0][j] = T[0][j] + T'[0][j-1]$

Question 4 Justifier que si i et j sont différents de 0, alors : $T'[i][j] = T[i][j] + \max(T'[i-1][j], T'[i][j-1])$.

Question 5 On veut créer la fonction récursive `somme_max` ayant pour paramètres un tableau T, un entier i et un entier j . Cette fonction renvoie la somme maximale pour tous les chemins possibles allant de la case $(0, 0)$ à la case (i, j) .

1. Quel est le cas de base, à savoir le cas qui est traité directement sans faire appel à la fonction `somme_max`? Que renvoie-t-on dans ce cas?
2. À l'aide de la question précédente, écrire en Python la fonction récursive `somme_max`.
3. Quel appel de fonction doit-on faire pour résoudre le problème initial?