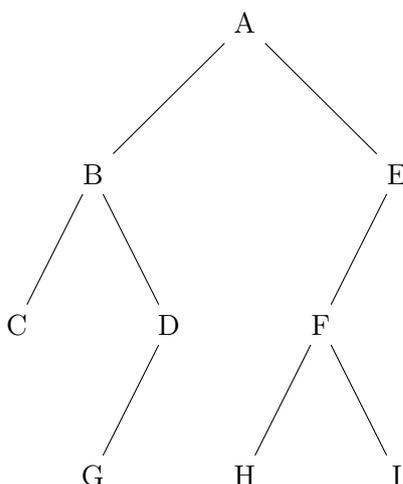


Exercice 3

Cet exercice porte sur les arbres binaires et les arbres binaires de recherche.

Dans cet exercice, on utilisera la convention suivante : la hauteur d'un arbre binaire ne comportant qu'un nœud est 1.

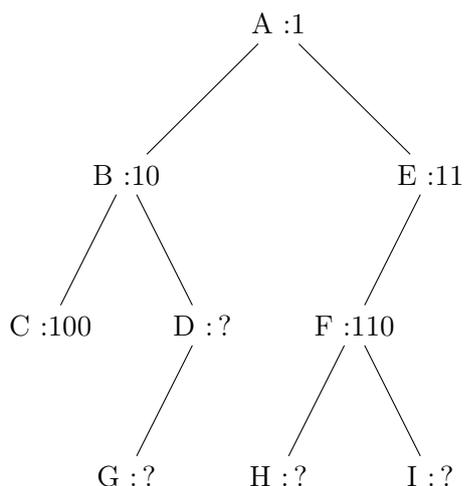
Question 1 Déterminer la taille et la hauteur de l'arbre binaire suivant :



Question 2 On décide de numéroter en binaire les nœuds d'un arbre binaire de la façon suivante :

- la racine correspond à 1 ;
- la numérotation pour un fils gauche s'obtient en ajoutant le chiffre 0 à droite au numéro de son père ;
- la numérotation pour un fils droit s'obtient en ajoutant le chiffre 1 à droite au numéro de son père ;

Par exemple, dans l'arbre ci-dessous, on a utilisé ce procédé pour numéroter les nœuds A, B, C, E et F .

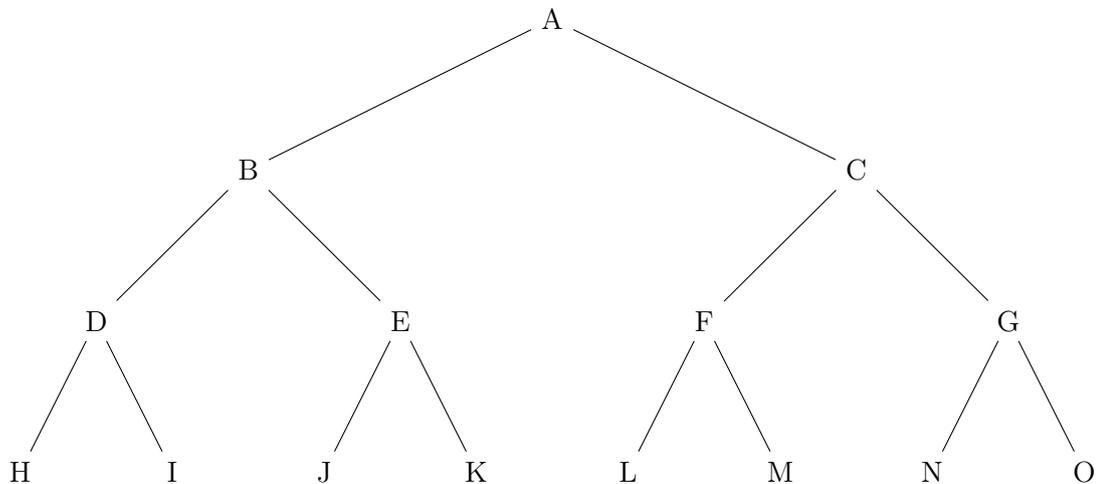


1. Dans l'exemple précédent, quel est le numéro en binaire associé au nœud G ?
2. Quel est le nœud dont le numéro en binaire vaut 13 en décimal ?
3. En notant h la hauteur de l'arbre, sur combien de bits seront numérotés les nœuds les plus en bas ?

4. Justifier que pour tout arbre de hauteur h et de taille $n \geq 2$, on a :

$$h \leq n \leq 2^h - 1$$

Question 3 Un arbre binaire est dit complet si tous les niveaux de l'arbre sont remplis.



Arbre binaire complet

On décide de représenter un arbre binaire complet par un tableau de taille $n + 1$, où n est la taille de l'arbre, de la façon suivante :

- La racine a pour indice 1 ;
- Le fils gauche du nœud d'indice i a pour indice $2 \times i$;
- Le fils droit du nœud d'indice i a pour indice $2 \times i + 1$;
- On place la taille n de l'arbre dans la case d'indice 0.

1. Déterminer le tableau qui représente l'arbre binaire complet de l'exemple précédent.
2. On considère le père du nœud d'indice i avec $i \geq 2$. Quel est son indice dans le tableau ?

Question 4 On se place dans le cas particulier d'un arbre binaire de recherche complet où les nœuds contiennent des entiers et pour lequel la valeur de chaque nœud est supérieure à celles des nœuds de son fils gauche, et inférieure à celles des nœuds de son fils droit.

Écrire une fonction `recherche` ayant pour paramètres un arbre `arbre` et un élément `element`. Cette fonction renvoie `True` si `element` est dans l'arbre et `False` sinon. L'arbre sera représenté par un tableau comme dans la question précédente.